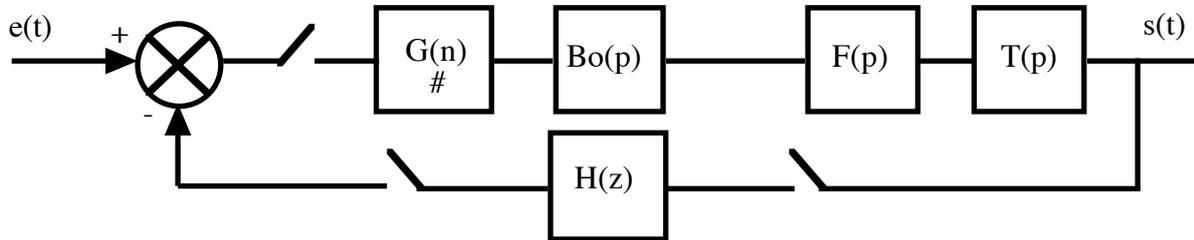


ASSERVISSEMENTS NUMÉRIQUES

1 Modélisation d'un asservissement possédant un (des) bloc(s) numérique(s)

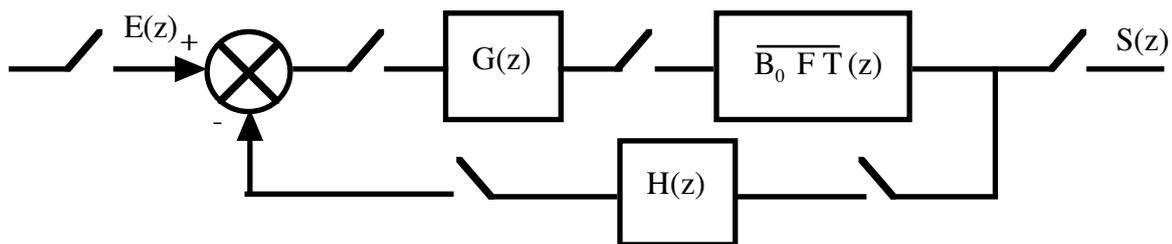


Dans un asservissement possédant des blocs numériques ou échantillonnés la première étape de la modélisation consiste à redéfinir le schéma-bloc pour isoler les entités échantillonnables.

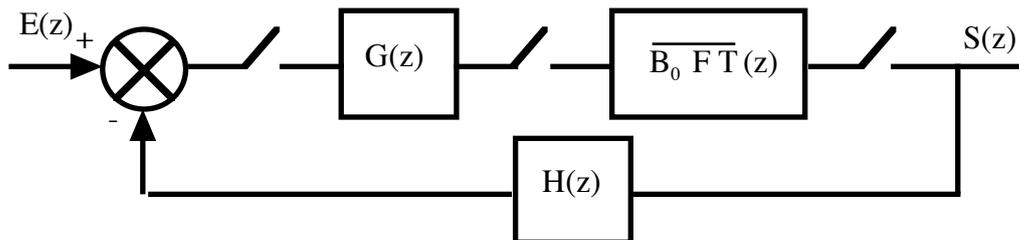
On doit toujours garder présent à l'esprit que l'échantillonnage fonctionne sur l'hypothèse que l'on n'a pas connaissance des grandeurs échantillonnées entre les instants d'échantillonnage.

Les règles à respecter sont les suivantes:

- tout bloc numérique est systématiquement placé entre 2 échantillonneurs;
- des blocs analogiques contigus doivent être regroupés pour constituer un seul bloc échantillonné.



Ce schéma peut encore être simplifié en retirant les échantillonneurs redondants:



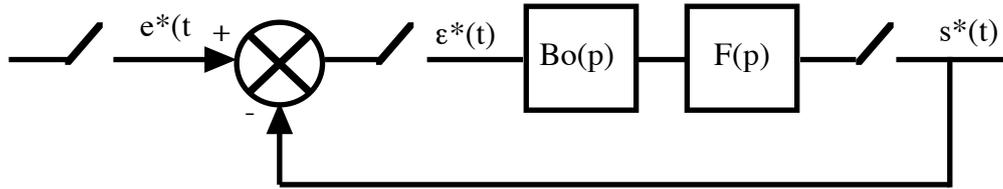
Le bloc $\overline{B_0 F T}(z)$ est obtenu en calculant la transformée en Z de $[B_0(p).F(p).G(p)]$

Dans ces conditions la fonction de transfert échantillonnée du système en boucle fermée vaut:

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{G(z).\overline{B_0 F T}(z)}{1 + H(z).G(z).\overline{B_0 F T}(z)}$$

2 Précision d'un asservissement possédant un (des) bloc(s) numérique(s)

2.1 calcul de l'erreur en régime permanent



La précision est définie par le calcul de l'erreur ε en régime permanent, soit:

$$\varepsilon_{RP} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \varepsilon(z)$$

$$\text{posons } T(p) = B_o(p).F(p) \text{ et } T(z) = \mathcal{Z} [B_o(p) F(p)] = \overline{B_o F}(z)$$

$$\text{d'où: } \varepsilon(z) = E(z) \frac{1}{1 + T(z)} \text{ et } \varepsilon_{RP} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) \frac{1}{1 + T(z)}$$

2.2 erreur de position

On applique à l'entrée du système un échelon unité: $e(t) = U(t) \Rightarrow E(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$

$$\text{donc: } \varepsilon_{RP} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{1}{1 + T(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + T(z)} = \frac{1}{1 + T(1)}$$

- **système de classe 0** (sans intégration): $T(z) = K \frac{N(z)}{D(z)}$

$$\varepsilon_{RP} = \frac{1}{1 + T(1)} = \frac{D(1)}{D(1) + K.N(1)} \text{ l'erreur est d'autant plus faible que le gain statique } K \text{ est grand;}$$

- **système de classe 1** (1 intégration): $T(z) = K \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{N(z)}{D(z)}$

$$\varepsilon_{RP} = \frac{1}{1 + \infty} = 0 \text{ l'erreur est nulle;}$$

2.3 erreur de traînage

On applique à l'entrée du système une rampe unité: $e(t) = t \Rightarrow E(z) = \frac{z}{(z-1)^2} Te = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} Te$

$$\text{donc: } \varepsilon_{RP} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} Te \frac{1}{1 + T(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} Te \frac{1}{1 + T(z)}$$

- **système de classe 0** (sans intégration): $T(z) = K \frac{N(z)}{D(z)}$

$$\varepsilon_{RP} = \frac{1}{0} \frac{1}{1 + T(1)} = \infty \text{ l'erreur tend à devenir infinie;}$$

- **système de classe 1** (1 intégration): $T(z) = K \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{N(z)}{D(z)}$

$$\varepsilon_{RP} = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})} Te \frac{(1 - z^{-1}) D(1)}{(1 - z^{-1}) D(1) + K.N(1)} = \frac{D(1)}{K.N(1)} Te \text{ l'erreur est inversement proportionnelle à } K;$$

2.4 erreur d'accélération

On applique à l'entrée du système une parabole: $e(t) = \frac{t^2}{2} \Rightarrow E(z) = \frac{z(z+1)}{2(z-1)^3} Te^2 = \frac{z^{-2}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3} Te^2$

$$\text{donc: } \varepsilon_{RP} = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{z^{-2}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3} Te^2 \frac{1}{1+T(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^2} Te^2 \frac{1}{1+T(z)}$$

- **système de classe 0** (sans intégration): $T(z) = K \frac{N(z)}{D(z)}$

$$\varepsilon_{RP} = \frac{1}{0} \frac{1}{1+T(1)} = \infty \text{ l'erreur tend à devenir infinie;}$$

- **système de classe 1** (1 intégration): $T(z) = K \frac{1}{1-z^{-1}} \frac{N(z)}{D(z)}$

$$\varepsilon_{RP} = \frac{1}{0} \frac{1}{1+T(1)} = \infty \text{ l'erreur tend à devenir infinie;}$$

- **système de classe 2** (2 intégrations): $T(z) = K \frac{1}{(1-z^{-1})^2} \frac{N(z)}{D(z)}$

$$\varepsilon_{RP} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^2} Te^2 \frac{(1-z^{-1})^2 D(1)}{(1-z^{-1})^2 D(1) + K.N(1)} = \frac{D(1)}{K.N(1)} Te^2$$

l'erreur est inversement proportionnelle à K;

2.5 résumé

classe	ε_p	ε_T	ε_a
0	$\frac{D(1)}{D(1) + K.N(1)}$	∞	∞
1	0	$\frac{D(1)}{K.N(1)} Te$	∞
2	0	0	$\frac{D(1)}{K.N(1)} Te^2$

3 Stabilité d'un asservissement possédant un (des) bloc(s) numérique(s)

3.1 hypothèses

L'étude de la stabilité en boucle fermée d'un asservissement linéaire continu (non échantillonné) revient à examiner l'analyse harmonique (lieu de Nyquist) de la FT de la boucle ouverte.

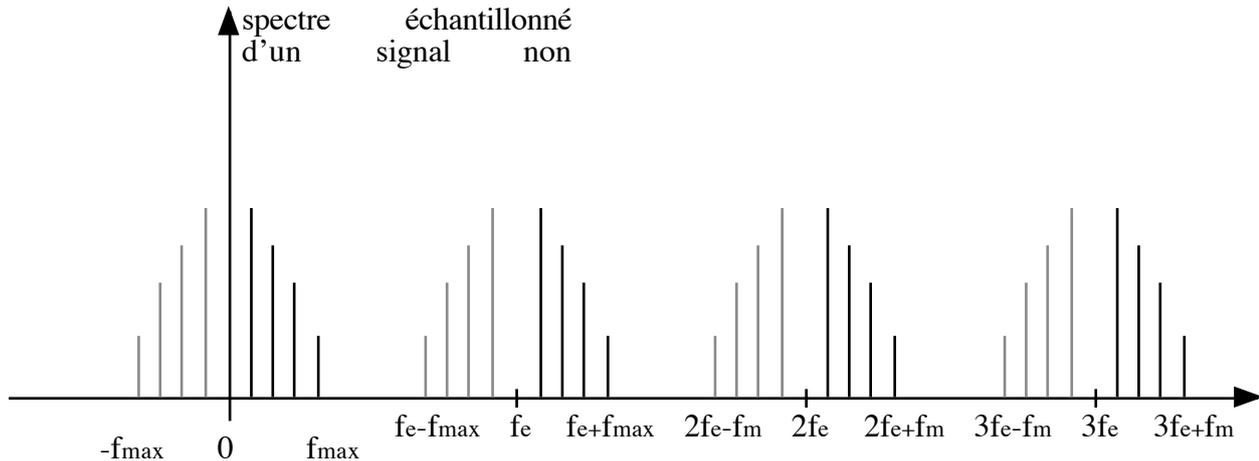
Cette étude est-elle transposable aux systèmes échantillonnés ?

Soit: $\underline{S}(j\omega) = \mathcal{F}[s(t)]$ le spectre de fréquences de $s(t)$

Ce spectre est limité en fréquences car le système asservi se comporte toujours comme un filtre passe-bas du fait de ses composants:

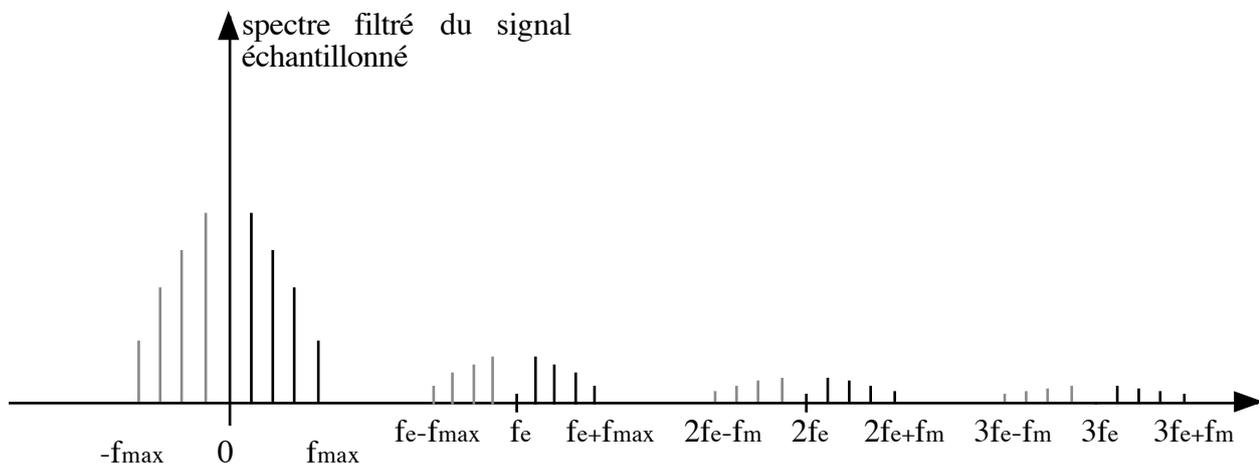
- actionneurs (moteurs, organes mécaniques)
- bloqueur (au niveau des CAN et CNA)

L'étude a montré que le spectre du signal échantillonné $s^*(t)$ est une réplication périodique du spectre du signal $s(t)$ continu de période $\omega_e = 2\pi / T_e$



Le théorème de Shannon nous indique que la fréquence d'échantillonnage doit être au moins 2 fois plus grande que la fréquence maximale du spectre de $s(t)$.

Dans la mesure où cette condition est satisfaite, on peut faire l'hypothèse que les éléments passe-bas du système vont éliminer les composantes spectrales supérieures à $f_e / 2$

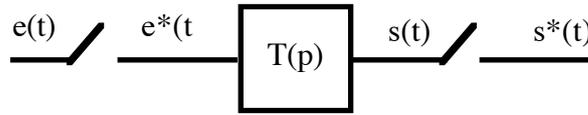


Le spectre obtenu est ainsi très proche de celui du signal non échantillonné.

Cette observation nous amène à conclure qu'une étude sommaire de la stabilité en boucle fermée d'un système échantillonné peut être conduite de la même manière que l'étude des systèmes continus.

3.2 conditions de stabilité

3.2.1 stabilité en boucle ouverte



un système est stable si il revient à sa position d'équilibre lorsqu'il en est écarté par une perturbation; cela signifie que pour une entrée impulsionnelle la réponse de la sortie doit être convergente (tendre vers 0).

$$e(t) = \delta(t) \Rightarrow e^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT_e) \delta(t - nT_e) = \delta(t)$$

$s(t) = \mathcal{L}^{-1} [T(p)] = R_i(t)$ est la réponse impulsionnelle (réponse libre) du système linéaire $T(p)$

$$s^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} R_i(nT_e) \delta(t - nT_e) \Rightarrow S^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} R_i(nT_e) e^{-nT_e p}$$

en posant $z = e^{T_e p}$ il vient:

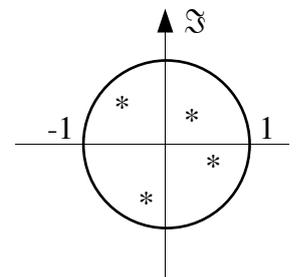
$$S^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} R_i(nT_e) z^{-n} = S(z) = \mathcal{Z} [T(p)] = T(z)$$

nous avons montré que pour les systèmes linéaires continus, la stabilité était vérifiée si les n racines r_1, r_2, \dots, r_n du dénominateur de $T(p)$ étaient à partie réelle négative, soit:

$$T(p) = \frac{K}{(p - r_1)(p - r_2) \dots (p - r_n)} = \frac{A_1}{(p - r_1)} + \frac{A_2}{(p - r_2)} + \dots + \frac{A_n}{(p - r_n)}$$

$$R_i(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + \dots + A_n e^{r_n t} = 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

$$T(z) = \frac{A_1 z}{(z - e^{r_1 T_e})} + \frac{A_2 z}{(z - e^{r_2 T_e})} + \dots + \frac{A_n z}{(z - e^{r_n T_e})}$$

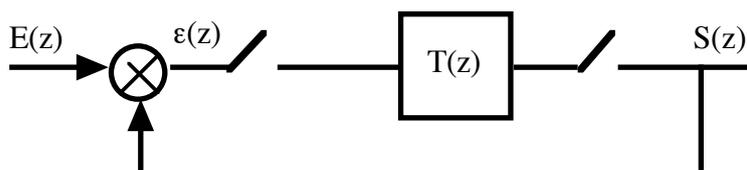


posons: $z_1 = e^{r_1 T_e}$, $z_2 = e^{r_2 T_e}$... $z_n = e^{r_n T_e}$ les n racines du dénominateur de $T(z)$

si les n racines r_1, r_2, \dots, r_n du dénominateur de $T(p)$ sont à partie réelle négative, alors les modules des n racines du dénominateur de $T(z)$ seront inférieur à 1

Règle: un système échantillonné est stable si tous les pôles (racine du dénominateur) de la fonction de transfert en z sont situés à l'intérieur du cercle unité dans le plan complexe (module inférieur à 1)

3.2.1 stabilité en boucle fermée



$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{T(z)}{1 + T(z)}$$

le système bouclé est stable si les racines du dénominateur $[1 + T(z)]$ ont un module inférieur à 1

3.3 critères de stabilité

3.3.1 critère de Jury

il permet de prévoir si les racines de $[1+T(z)]$ sont à l'intérieur du cercle unité en examinant les coefficients du polynôme numérateur de $[1+T(z)]$

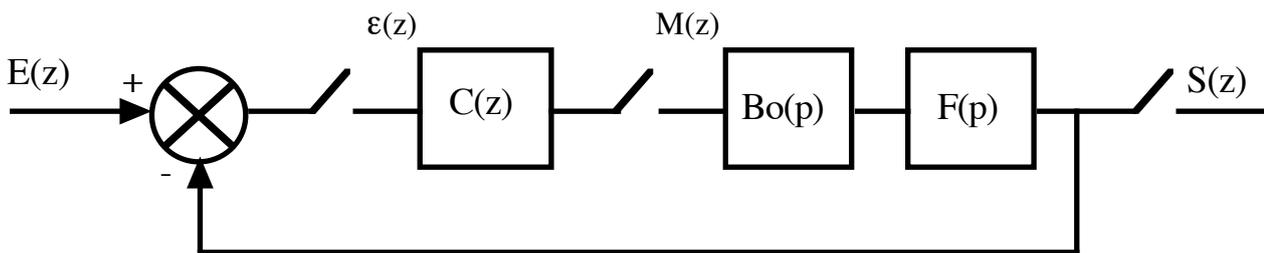
3.3.2 critère de Nyquist

d'après les hypothèses formulées précédemment, la réponse harmonique du système échantillonné est très proche de celle du système continu, d'autant plus que la fréquence d'échantillonnage est élevée; rappelons le critère de Nyquist pour les systèmes continus: le système bouclé est stable si le lieu de Nyquist de la fonction de transfert $T(p)$ de la boucle ouverte n'entoure pas le point (-1) pour ω variant de $-\infty$ à $+\infty$

en posant: $z = e^{T_e p} = e^{j\omega T_e}$ la variable z reprend périodiquement les mêmes valeurs lorsque ω varie de $-\infty$ à $+\infty$; on peut limiter l'étude à l'intervalle $[\omega = -\pi/T_e, \omega = +\pi/T_e]$ ou encore à $[0, 2\pi/T_e]$; dans ce cas le système sera stable si le tracé de $T(z)$ n'entoure pas le point (-1) .

4 Les correcteurs numériques

4.1 principe



On désire réaliser un correcteur # permettant d'obtenir la réponse souhaitée pour une entrée test (échelon, rampe, etc.); parmi les techniques utilisées, on distinguera les techniques harmoniques et les techniques temporelles:

- **temporelles:** elles sont basées sur une modélisation du processus corrigé $H(z) = S(z) / E(z)$ dans laquelle on s'impose à priori la forme de la sortie pour une entrée test donnée; les techniques # permettent pratiquement toujours de trouver une solution qui fonctionne sur le papier; c'est dans la pratique que l'on peut juger de la validité de la technique

- **harmoniques:** celles issues des correcteurs PID \square transformés en PID # par les techniques habituelles de transformation $p \rightarrow z$ (transformation bilinéaire, etc.); historiquement, les techniques # ont essayé de copier les techniques \square ;

4.2 correcteur à temps minimal

on s'impose que la sortie du système soit atteinte en un temps minimal pour une entrée échelon:

- **en un coup**, la sortie $s(nT_e)$ recopie l'entrée $e(nT_e)$ avec une période T_e de retard;
soit: $s(nT_e) = e[(n-1)T_e]$

la FT du système corrigé doit s'écrire: $H(z) = S(z) / E(z) = z^{-1}$

- **en 2 coups**, la sortie $s(nT_e)$ recopie l'entrée $e(nT_e)$ avec 2 périodes T_e de retard;
soit: $s(nT_e) = \alpha e[(n-1)T_e] + \beta e[(n-2)T_e]$
la FT du système corrigé doit s'écrire:
 $H(z) = S(z) / E(z) = \alpha z^{-1} + \beta z^{-2}$ avec $\alpha + \beta = 1$ pour $H(1) = 1$

ces techniques fonctionnent bien sur la papier mais présentent une grave défaut: l'actionneur est soumis à rude épreuve avec une commande qui peut comporter de très grandes oscillations entre les instants d'échantillonnage (ces oscillations ne sont pas prises en compte dans le modèle mathématique puisque la transformée en Z ne s'intéresse qu'aux valeurs aux seuls instants d'échantillonnage);

application: correction d'un premier ordre avec intégration

$$F(p) = \frac{1}{p(1 + \tau p)} \Rightarrow G(p) = \text{Bo } F(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p} \frac{1}{p(1 + \tau p)}$$

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{p^2(1 + \tau p)} \right] = (1 - z^{-1}) \left[\frac{T_e z}{(z-1)^2} - \frac{\tau(1 - e^{-T_e/\tau})z}{(z-1)(z - e^{-T_e/\tau})} \right]$$

$$G(z) = \frac{T_e}{(z-1)} - \frac{\tau(1 - e^{-T_e/\tau})}{(z - e^{-T_e/\tau})} = \frac{T_e(z - e^{-T_e/\tau}) - \tau(z-1)(1 - e^{-T_e/\tau})}{(z-1)(z - e^{-T_e/\tau})} = \frac{Q(z)}{P(z)}$$

pour une réponse en un coup:

$$C(z) = \frac{H(z)}{1 - H(z)} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{(z - e^{-T_e/\tau})}{T_e(z - e^{-T_e/\tau}) - \tau(z-1)(1 - e^{-T_e/\tau})}$$

pour une réponse en 2 coups:

$$C(z) = \frac{H(z)}{1 - H(z)} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\alpha z^{-1} + (1-\alpha)z^{-2}}{1 - \alpha z^{-1} - (1-\alpha)z^{-2}} \frac{P(z)}{Q(z)}$$

4.3 correcteur à réponse pile

afin de ménager le matériel, on se propose de modéliser le processus corrigé afin que la réponse à un échelon soit atteint au bout d'un *nombre fini de périodes d'échantillonnage*, et si possible *minimal*; c'est la réponse pile; on ne s'impose pas a priori la valeur du temps de réponse, ce qui a pour effet de ne pas introduire d'oscillation entre les instants d'échantillonnage;

on s'impose les conditions suivantes:

- réponse atteinte au bout d'un **nombre fini N de périodes** d'échantillonnage: ①

$$\Rightarrow H(z) = \sum_{n=0}^N h_n z^{-n}$$

- **erreur nulle** pour une entrée échelon: ②

$$\Rightarrow H(1) = 1$$

- le correcteur ne doit **pas rajouter de pôles supplémentaires** à ceux du processus non corrigé: ③
 ⇒ pas d'oscillation entre les instants d'échantillonnage

posons: $G(z) = \mathcal{Z} [B_o(p) F(p)] = \underline{B_o} F(z)$ la fonction de transfert du processus

$G(z) = Q(z) / P(z)$ où $Q(z)$ et $P(z)$ sont les polynômes en z du numérateur et du dénominateur

le correcteur s'écrit:

$$C(z) = \frac{H(z)}{1 - H(z)} \frac{P(z)}{Q(z)}$$

la commande du processus s'exprime par:

$$M(z) = \frac{H(z)}{Q(z)} P(z) E(z) \Rightarrow \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)} H(z)$$

pour satisfaire à la condition ③ :

$$\frac{H(z)}{Q(z)} = K = \text{Cte} \Rightarrow H(z) = K Q(z)$$

pour satisfaire à la condition ② :

$$H(1) = K Q(1) = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{Q(1)}$$

le correcteur s'écrit alors:

$$C(z) = \frac{K Q(z)}{1 - K Q(z)} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{K P(z)}{1 - K Q(z)} = \frac{P(z)}{\frac{1}{K} - Q(z)} = \frac{P(z)}{Q(1) - Q(z)}$$

on lui préférera l'écriture suivant les polynômes en z^{-1} :

$$\left[C(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(1) - Q(z^{-1})} \right]$$

4.4 correcteurs PID numériques

on s'inspire du correcteur PID analogique:

$$C(p) = K \left[1 + T_d p + \frac{1}{T_i p} \right] = K \frac{1 + T_i p + T_i T_d p^2}{T_i p}$$

on effectue la transformation $p \rightarrow z$

- par la méthode d'Euler (Backward): $p = (1 - z^{-1}) / T_e$

$$C(z) = K \left[\frac{1 + \frac{T_i}{T_e} (1 - z^{-1}) + \frac{T_i T_d}{T_e} (1 - z^{-1})^2}{\frac{T_i}{T_e} (1 - z^{-1})} \right]$$

$$C(z) = K \left[\frac{(T_e^2 + T_i T_e + T_i T_d) - (T_i T_e + 2 T_i T_d) z^{-1} + T_i T_d z^{-2}}{T_i T_e (1 - z^{-1})} \right]$$

- par la transformation bilinéaire: $p = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$

$$C(z) = K \left[\frac{1 + 2 \frac{T_i}{T_e} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) + 2 \frac{T_i T_d}{T_e} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^2}{2 \frac{T_i}{T_e} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)} \right]$$